

# известия

ТУЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

## Серия

Вычислительная техника. Информационные технологии. Системы управления

Выпуск 4

2005

#### А.Ш. Авшалумов, Г.Ф. Филаретов (Москва, МИКМ)

### МЕДИАННЫЕ ФИЛЬТРЫ КАК СРЕДСТВО ОБРАБОТКИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Анализируются свойства медианных скользящих фильтров при их использовании для обработки стохастических временных рядов. Анализ осуществляется с помощью специально спланированного имитационного эксперимента, по результатам которого находятся частотные характеристики медианных фильтров для рядов с различными вероятностными свойствами. Проводится сопоставление свойств медианных фильтров с аналогичными фильтрами скользящего среднего. Установлено, что в отличие от последних, свойства медианных фильтров зависят и от вида функций распределения вероятностей. Отмечается возможность использования разностного сигнала с выходов медианного фильтра и фильтра скользящего среднего при обработки данных в различных информационных системах.

Как известно [1], скользящим медианным фильтром шириной m именуется преобразователь, выходной сигнал которого  $y_t$  в некоторый текущий дискретный момент времени t формируется из входного временного ряда ...,  $x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, ...$  в соответствии с формулой

$$y_t = y_t(\overrightarrow{X}) = Me(x_{t-l}, x_{t-l+1}, ..., x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, ..., x_{t+l+1}, x_{t+1}),$$
 (1)

где  $Me = Me(x_1, x_2, ..., x_m) = x_l$ ;  $x_{(j)}$ , j = 1, 2, ..., m — элементы вариационного ряда, т.е. упорядоченных в порядке возрастания (неубывания) значений

$$x_1, x_2, ..., x_m$$
:  
 $x_{(1)} = \min(x_1, x_2, ..., x_m) \le x_{(2)} \le x_{(3)} \le ... \le x_{(m)} = \max(x_1, x_2, ..., x_m)$ 

Формула (1) написана для варианта нечетного значения m = 2l + 1. Именно этот вариант, получивший наибольшее распространение при построении медианных фильтров, будет рассматриваться в дальнейшем.

Медианный фильтр относится к категории нелинейных низкочастотных (сглаживающих) фильтров и обладает рядом достаточно очевидных специфических свойств:

- выходной сигнал фильтра имеет характерный ступенчатый вид, объясняющийся тем, что он может оставаться неизменным на протяжении нескольких дискретных отсчетов времени;
- для медианного фильтра выполняются некоторые соотношения, справедливые для линейных фильтров, а именно:

$$y_t(c\vec{X}) = cy_t(\vec{X});$$
  
 $y_t(a + \vec{X}) = a + y_t(\vec{X});$ 

- медианный фильтр не относится к числу линейных фильтров, поскольку для него в общем случае не выполняется условие аддитивности:

$$y_t(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) \neq y_t(\vec{X}_1) + y_t(\vec{X}_2).$$

Для более полного выяснения свойств медианных фильтров представляется необходимым найти их основные характеристики, подобные тем, которые используются при описании обычных линейных фильтров. Это, в первую очередь, амплитудно-фазочастотные характеристики. Поскольку получить их в аналитическом виде не удаётся, предлагается использовать для этих целей имитационный эксперимент. Имитационный эксперимент должен обеспечить получение достаточно полной информации о свойствах медианного фильтра на представительном множестве сигналов различных типов

В принципе задача определения характеристик медианного фильтра является задачей идентификации динамического объекта с использованием пробных сигналов с заданными свойствами. Поэтому для ее решения могут быть использованы соответствующие методы идентификации, описанные в научной литературе [2]. При этом для более наглядного суждения об отличительных особенностях алгоритмов медианной фильтрации целесообразно сопоставление свойств медианного фильтра со свойствами классического фильтра скользящего среднего при одинаковой ширине m.

Для исследования свойств медианных фильтров при случайных воздействиях удобно использовать классический алгоритм идентификации объектов в частотной области. Он основан на известном

соотношении, связывающем Фурье-преобразования сигналов x(t) и y(t) на входе и выходе объекта:

$$G_{xy}(f) = W(jf) \cdot G_{xx}(f),$$

где W(jf) - амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) фильтра,  $G_{xy}(f)$  и  $G_{xx}(f)$  - односторонние спектральные плотности - взаимная двух процессов x(t), y(t) и автоспектральная входного процесса x(t) соответственно.

При экспериментальном анализе дискретных случайных процессов по реализации, содержащей N наблюдений, функции  $G_{xy}(f_k)$ ,  $G_{xx}(f_k)$  заменяются их оценками  $G_{xy}(f_k)$ ,  $G_{xx}(f_k)$ . Тогда оценка АФЧХ, очевидно

$$W(jf_k) = \frac{G_{xy}(f_k)}{G_{xx}(f_k)} = \frac{\left|G_{xy}(f_k)\right|}{G_{xx}(f_k)} \cdot \exp(-j\varphi(f_k)) = A(f_k) \cdot \exp(-j\varphi(f_k)), (2)$$

где  $A(f_k)$  - оценка амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) фильтра, а  $\varphi(f_k)$ - оценка его фазо-частотной характеристики (ФЧХ).

Кроме вышеперечисленных, целесообразно находить и оценку функции когерентности, которая в данном случае может наглядно охарактеризовать отличие медианного фильтра от линейного. Эту оценку получают по формуле, соответствующей исходному определению понятия функции когерентности [2]:

$$\mathcal{P}_{XY}^{2}(f_{k}) = \frac{\left| \vec{G}_{XY}(f_{k}) \right|^{2}}{\vec{G}_{XX}(f_{k}) \cdot \vec{G}_{YY}(f_{k})}.$$
(3)

элементы: энфэливаях кычныхы у на чло фо опылкымых астычных

1. Генерация случайного процесса типа «белого шума» с заданной одномерной функцией распределения вероятностей с числом наблюдений N.

- 2. Определение оценок математического ожидания и дисперсии реализации сгенерированного процесса и нормирование значений этого процесса; тем самым формируется входной процесс X(t) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.
- 3. Фильтрация процесса X(t) медианным фильтром выбранной ширины m = 2l + 1, т.е. получение выходного процесса Y(t).
- 4. Спектральный анализ процессов и определение искомых характеристик медианного фильтра:  $A(f_k)$ ,  $\varphi(f_k)$ ,  $\gamma_{XY}^2(f_k)$ .
- 5. Повторение пп. 3 и 4 для фильтра скользящего среднего той же ширины.

Принципиальными вопросами, которые должны быть рассмотрены до проведения имитационного эксперимента с медианным фильтром, являются вопросы выбора длины обрабатываемой реализации N и ширины спектрального сглаживающего окна h, используемого при спектральном анализе. От их выбора зависит точность и достоверность конечных результатов.

Для того чтобы обоснованно выбрать указанные величины, проведен предварительный имитационный эксперимент с фильтром скользящего среднего, частотные характеристики которого априори известны. В ходе эксперимента варьировались значения N и h. В результате подобраны такие их значения, которые позволяют получить необходимую точность моделирования без излишнего увеличения объема вычислений. Приемлемыми с этой точки зрения оказались следующие величины N=32768 и h=99. Именно они и использовались затем для всех вариантов имитационного моделирования.

В ходе имитационного эксперимента генерировался дискретный процесс типа «белого» шума с различными одномерными функциями распределения вероятностей. Далее на рис. 1-4 приведены результаты, полученные для трех вариантов распределения: гауссовского, равномерного и экспоненциального при m=11.

На рис. 1-3 представлены амплитудно-частотные характеристики для фильтра скользящего среднего (сплошная линия) и медианного фильтра (пунктирная линия). Очевидно, что, как и ожидалось, для фильтра скользящего среднего указанная характеристика остается неизменной для любой функции распределения. Вместе с тем, для медианного фильтра она существенно изменяется для разных одномерных законов распределения вероятностей.

К аналогичному выводу можно прийти и анализируя фазовые характеристики фильтров. При этом выясняется, что различия в ФЧХ менее существенны, чем для АФХ.

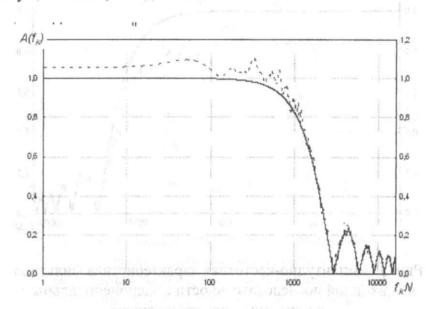


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика фильтров для гауссовской входной последовательности

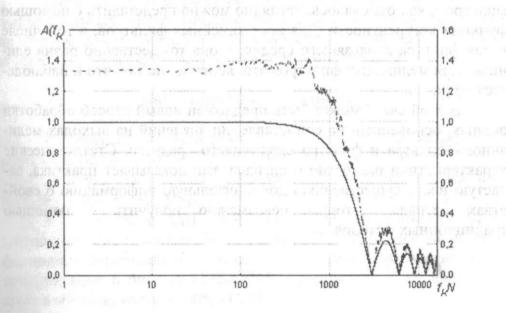


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика фильтров для входной последовательности с равномерным одномерным распределением

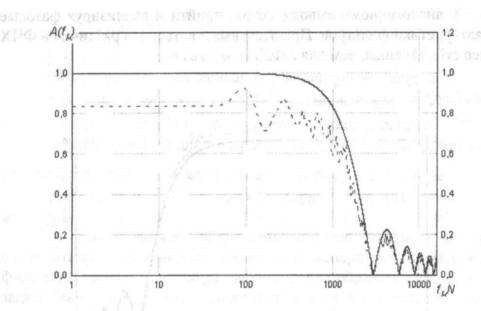


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика фильтров для входной последовательности с экспоненциальным одномерным распределением

Степень нелинейных искажений, вносимых тем или иным фильтром, как отмечалось, наглядно можно представить с помощью функции когерентности. Для всех линейных фильтров, в том числе и для фильтра скользящего среднего, она тождественно равна единице. Для медианных фильтров это, конечно, не так, что и наблюдается на рис. 4.

В этой связи может быть предложен новый способ обработки данных, основанный на сопоставлении значений на выходах медианного фильтра и фильтра скользящего среднего. Статистические характеристики разностного сигнала, как показывает практика, зачастую несут существенную дополнительную информацию о свойствах сигнала, которую невозможно получить с помощью традиционных методов.

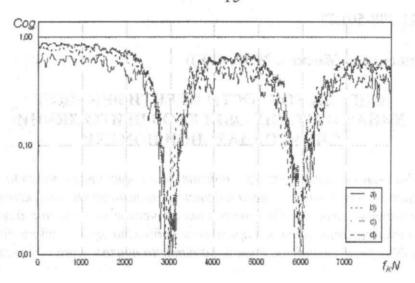


Рис. 4. Функции когерентности фильтров: а —фильтр скользящего среднего;

- b медианный фильтр; гауссовское распределение;
- с медианный фильтр; равномерное распределение;
- d медианный фильтр; экспоненциальное распределение

Такой подход был успешно апробирован для целей получения дополнительных диагностических показателей, используемых в медицинском диагностическом КВЧ-комплексе, разработанном в Московском институте кибернетической медицины (МИКМ).

#### Библиографический список

- 1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998.
- 2. Бендат Дж, Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
- 3. Авшалумов А.Ш., Филаретов Г.Ф. Медицинский КВЧдиагностический комплекс. Материалы XXXII Международной конференции «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе IT+S&E'05 (Приложение к журналу «Открытое образование»). – 2005. - С. 313-315.